Metodi Matematici per l'Ingegneria

Davide Buoso

Esercitazione del 18/03/2016

Un po' di teoria

Funzioni olomorfe

Ricordiamo anzitutto che, come per funzioni di variabili reali, è possibile definire la derivata anche nel campo complesso: data una funzione f definita da un aperto A di $\mathbb{C}$ a valori in $\mathbb{C}$, allora diremo che f è derivabile in senso complesso (o che f è **olomorfa**) se, per ogni $z \in A$, il limite

$$f'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

esiste ed appartiene a $\mathbb{C}$. Notiamo che la variabile h nel limite varia in $\mathbb{C}$, non solo in $\mathbb{R}$! Ad ogni modo, continuano a valere tutte le regole classiche di derivazione (somma, prodotto, composizione, ecc.).

Non è difficile vedere che f è olomorfa se e soltanto se, ponendo

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

ovvero per $u = \mathrm{Re}(f)$ e $v = \mathrm{Im}(f)$, allora u e v come funzioni reali a variabili in $\mathbb{R}^2$ sono differenziabili e soddisfano le **equazioni di Cauchy-Riemann**

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

che si possono anche scrivere così

$$i\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

o così

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \partial_{\bar{z}} f = 0.$$

In tal caso, si ha che

$$f'(z) = f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y).$$

A partire dalle equazioni di Cauchy-Riemann è molto facile vedere che, se f è olomorfa, allora sia u che v devono essere **funzioni armoniche**, ovvero

$$\Delta u = \Delta v = 0,$$

dove $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Ne consegue che, ogni volta che abbiamo a che fare con una funzione armonica u, è possibile accoppiarla ad un'altra funzione armonica v (detta **funzione armonica coniugata**) tale che $u + iv$ sia una funzione armonica. Questo accoppiamento è dato naturalmente dalle equazioni di Cauchy-Riemann.

Cammini, parametrizzazioni e integrali

Ricordiamo che una **curva** è una funzione continua il cui dominio è un intervallo di $\mathbb{R}$. Noi siamo interessati a curve nel piano complesso, quindi con $\gamma : I \to \mathbb{C}$. Il **supporto** della curva γ è l'immagine di I tramite γ, ovvero

$$\gamma(I) = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists\, t \in I \text{ t.c. } z = \gamma(t)\}.$$

Se $I = [a, b]$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$ (con $a < b$), diremo che la curva γ è **semplice** se è una funzione iniettiva da $[a, b[$ (intuitivamente, se la curva non ritorna mai su se stessa), mentre diremo invece che è **chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva che è al tempo stesso semplice e chiusa si dirà **di Jordan** (da Camille Jordan, matematico francese). Per quanto riguarda la regolarità, diremo che la curva è **di classe** C^1 (risp. C^1 a tratti) se tale è la funzione γ.

Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua (non necessariamente olomorfa), possiamo definire l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma f(z)dz$$

nel modo seguente

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt,$$

ove γ è la curva parametrizzata da $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Osserviamo che la definizione appena data **non** dipende dalla particolare parametrizzazione (fintanto che il verso di percorrenza della curva rimane lo stesso). Sia infatti $\tilde{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{C}$ una seconda parametrizzazione della curva. Si può dimostrare che esiste un omeomorfismo $\delta : [c, d] \to [a, b]$ tale che $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \delta$. Se inoltre la curva è di classe C^1, allora δ pure è un diffeomorfismo di classe C^1 e $\delta' > 0$. Usando il Teorema del cambio di variabili per gli integrali in $\mathbb{R}$ si vede subito che il calcolo con γ o con $\tilde{\gamma}$ produce lo stesso risultato.

Esercizi

Esercizio 1. Stabilire se la funzione $f(z) = |z|^2$ sia olomorfa o meno.

Svolgimento. Osserviamo che $f(x+iy) = x^2+y^2 = u(x, y)+iv(x, y)$, con $v \equiv 0$. Affinché le CR siano soddisfatte, dovremmo avere che u sia una costante, cosa che non è. Se ne deduce che f non è olomorfa.

Esercizio 2. Sia $f(z) = e^z$. Dimostrare che f è olomorfa e calcolare $f'(z)$.

Svolgimento. Abbiamo che $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$. Quindi

$$u_x(x, y) = e^x \cos y = v_y(x, y)$$

e

$$u_y(x, y) = -e^x \sin y = -v_x(x, y),$$

quindi le CR sono soddisfatte, per cui f è olomorfa. Si ha che

$$f'(z) = f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy} = e^z.$$

Esercizio 3. Determinare se la funzione $f(z) = az^2 + bz + c$, per $a, b, c \in \mathbb{C}$, sia olomorfa o meno, e nel caso calcolarne la derivata.

Svolgimento. Sfruttiamo il fatto che le proprietà della derivazione in $\mathbb{R}$ sono valide anche in $\mathbb{C}$, da cui osserviamo subito che è sufficiente mostrare che $g(z) = z$ e $h(z) = k$ (con $k \in \mathbb{C}$ una costante) sono olomorfe. Calcolando il limite del rapporto incrementale è immediato vedere che

$$g'(z) = 1 \quad \text{e} \quad h'(z) = 0,$$

da cui otteniamo immediatamente che, per $p(z) = z^n$ con $n \in \mathbb{N}$ allora $p'(z) = nz^{n-1}$. È chiaro che $f'(z) = 2az + b$.

Esercizio 4. Determinare se le seguenti funzioni siano olomorfe o meno, e nel caso calcolarne le derivate:

- $f(z) = \sin z$;
- $f(z) = \cos z$;
- $f(z) = \sinh z$;
- $f(z) = \cosh z$.

Svolgimento. Esercizio per casa.

Esercizio 5. Determinare se $f(z) = 1/z$ sia o meno olomorfa, e nel caso calcolarne la derivata.

Svolgimento. Abbiamo $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ e $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, da cui

$$u_x(x, y) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = v_y(x, y)$$

e

$$u_y(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -v_x(x, y),$$

quindi le CR sono soddisfatte, per cui f è olomorfa. Si ha che

$$f'(z) = f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = \frac{-x^2 + y^2 + 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\bar{z}^2}{z^2\bar{z}^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

Esercizio 6. Determinare se la funzione

$$f(z) = \frac{az^2 + bz + c}{\alpha z^2 + \beta z + \gamma},$$

per $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, sia olomorfa o meno, e nel caso calcolarne la derivata.

Svolgimento. Esercizio per casa. (Suggerimento: cominciare dal caso $f(z) = \frac{1}{\alpha z^2+\beta z+\gamma}$, e sfruttare le regola di Leibniz assieme alla proprietà che $f(z)g(z) = 1$ con $g(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$).

Esercizio 7. Determinare se la funzione

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$$

sia armonica o meno, e nel caso calcolarne l'armonica coniugata v e la relativa funzione olomorfa $f = u + iv$.

Svolgimento. La funzione u è armonica, e per le CR la sua coniugata v deve soddisfare le seguenti equazioni

$$\begin{cases} v_x(x,y) = 2x + 2y - 3 \\ v_y(x,y) = 2x - 2y - 2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo che

$$v(x,y) = 2xy - y^2 - 2y + c(x),$$

ove $c(x)$ è una funzione della sola x (ovvero indipendente da y) da determinare. In particolare otteniamo che

$$v_x(x,y) = 2y + c'(x),$$

ed eguagliando con la prima equazione del sistema otteniamo che $c'(x) = 2x - 3$, ovvero $c(x) = x^2 - 3x + k$ per $k \in \mathbb{R}$. Possiamo scegliere $k = 0$ (qualsiasi scelta è ugualmente valida) e otteniamo

$$v(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - 3x + 2y.$$

Allora abbiamo che

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = (1+i)z^2 - (2+3i)z.$$

Esercizio 8. Determinare se la funzione

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

sia armonica o meno, e nel caso calcolarne l'armonica coniugata v e la relativa funzione olomorfa $f = u + iv$.

Svolgimento. La funzione u è armonica, e per le CR la sua coniugata v deve soddisfare le seguenti equazioni

$$\begin{cases} v_x(x,y) = 6xy \\ v_y(x,y) = 3x^3 - 3y^2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo che

$$v(x,y) = 3x^2y + c(y),$$

ove $c(y)$ è una funzione della sola y da determinare. In particolare otteniamo che

$$v_y(x,y) = 3x^2 + c'(y),$$

ed eguagliando con la seconda equazione del sistema otteniamo che $c'(y) = -3y^2$, ovvero $c(y) = -y^3 + k$ per $k \in \mathbb{R}$. Possiamo scegliere $k = 0$ e otteniamo

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3.$$

Allora abbiamo che

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = z^3.$$

Esercizio 9. Determinare se le funzioni

$$u(x, y) = xy, \quad u(x, y) = x + 3y$$

siano armoniche o meno, e nel caso calcolarne le armoniche coniugate v e le relative funzioni olomorfe $f = u + iv$.

Svolgimento. Esercizio per casa.

Esercizio 10. Determinare tutte le funzioni olomorfe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tali che $\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(z)$.

Svolgimento. Abbiamo $u(x, y) = x$. L'armonica coniugata è allora $v(x, y) = y+c$ con $c \in \mathbb{R}$, da cui otteniamo che

$$f(z) = z + ic, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 11. Determinare tutte le funzioni olomorfe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tali che $\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Im}(z)$.

Svolgimento. Abbiamo $u(x, y) = y$. L'armonica coniugata è allora $v(x, y) = -x + c$ con $c \in \mathbb{R}$, da cui otteniamo che

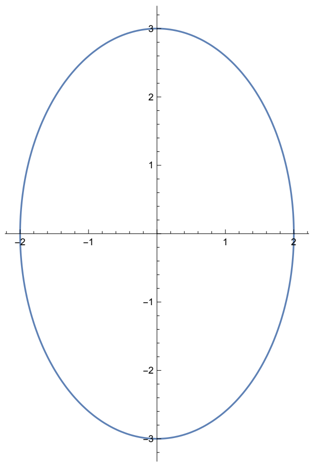
$$f(z) = -iz + ic, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 12. Determinare tutte le funzioni olomorfe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tali che $\mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{Re}(z) + \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Esercizio per casa.

Esercizio 13. Sia data la curva $\gamma(t) = 2\cos t + 3i \sin t$, per $t \in [0, 2\pi]$. Determinare se la curva è di Jordan, se è regolare (e nel caso calcolarne la derivata) e disegnarne il supporto.

Svolgimento. Disegnarne subito il supporto ci permette di capire che si tratta di un'ellisse centrata in $z = 0$.



Per vedere se la curva è semplice, supponiamo che esistano $t_1, t_2 \in [0, 2\pi[$ tali che $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, ovvero

$$2 \cos t_1 + 3i \sin t_1 = 2 \cos t_2 + 3i \sin t_2,$$

ovvero

$$\begin{cases} \cos t_1 = \cos t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \end{cases}$$

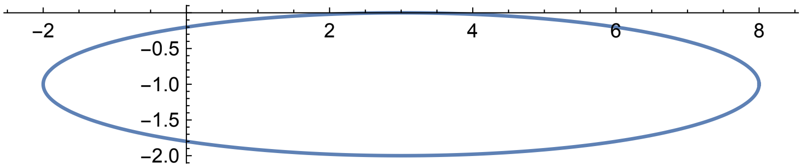
che è possibile solo per $t_1 = t_2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, e quindi nel nostro caso per $t_1 = t_2$. Abbiamo ristretto l'intervallo a $[0, 2\pi[$ perché si vede subito che $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, cioè la curva è pure chiusa e quindi di Jordan.

Vediamo infine che la curva è sicuramente C^1 e

$$\gamma'(z) = -2 \sin t + 3i \cos t.$$

Esercizio 14. Sia data la curva $\gamma(t) = 5 \cos t + 3 + i(\sin t - 1)$, per $t \in [0, 2\pi]$. Determinare se la curva è di Jordan, se è regolare (e nel caso calcolarne la derivata) e disegnarne il supporto.

Svolgimento. Disegnarne subito il supporto ci permette di capire che si tratta di un'ellisse centrata in $z = 3 - i$.



Per vedere se la curva è semplice, supponiamo che esistano $t_1, t_2 \in [0, 2\pi[$ tali che $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, ovvero

$$5 \cos t_1 + 3 + i(\sin t_1 - 1) = 5 \cos t_2 + 3 + i(\sin t_2 - 1),$$

ovvero

$$\begin{cases} \cos t_1 = \cos t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \end{cases}$$

che è possibile solo per $t_1 = t_2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, e quindi nel nostro caso per $t_1 = t_2$. Abbiamo ristretto l'intervallo a $[0, 2\pi[$ perché si vede subito che $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, cioè la curva è pure chiusa e quindi di Jordan.

Vediamo infine che la curva è sicuramente C^1 e

$$\gamma'(z) = -5 \sin t + i \cos t.$$

Esercizio 15. Determinare una parametrizzazione γ della circonferenza di centro $z = 2 - i$ e raggio $\rho = 3$ tale che $|\gamma'(t)| \equiv 2$.

Svolgimento. Una possibile parametrizzazione γ della circonferenza richiesta è $\gamma(t) = 2 - i + 3 \cos t + 3i \sin t$, per $t \in [0, 2\pi]$. Un conto veloce ci fa vedere che $|\gamma'| \equiv 3$. Dobbiamo trovare una riparametrizzazione, quindi una funzione $\delta : I \to [0, 2\pi]$ tale che

$$|(\gamma \circ \delta)'| \equiv 2.$$

Abbiamo lasciato incognito l'intervallo di definizione I di δ perché non lo conosciamo a priori!

Osserviamo che

$$2 = |(\gamma \circ \delta)'(t)| = |\gamma'(\delta(t)) \cdot \delta'(t)| = |\gamma'(\delta(t))| \cdot |\delta'(t)| = 2|\delta'(t)|,$$

da cui otteniamo che δ deve soddisfare l'uguaglianza

$$|\delta'| \equiv \frac{2}{3}.$$

Ricordiamo che, se δ' cambiasse segno, allora δ non sarebbe una biiezione, e quindi si presentano due sole possibilità:

- $\delta'(t) \equiv \frac{2}{3}$;
- $\delta'(t) \equiv -\frac{2}{3}$.

Nel caso in cui $\delta'(t) \equiv \frac{2}{3}$, abbiamo che $\delta(t) = \frac{2}{3}t + k$, per $k \in \mathbb{R}$. Siccome ci viene richiesta una parametrizzazione, possiamo scegliere il valore di k che più ci aggrada. Noi sciegliamo $k = 0$, il che vuol dire che allora $I = [0, 3\pi]$ e la parametrizzazione richiesta è $\gamma(t) = 2 - i + 3\cos\frac{2}{3}t + 3i\sin\frac{2}{3}t$.

Il caso $\delta'(t) \equiv -\frac{2}{3}$ è del tutto analogo e viene lasciato come esercizio per casa.

Esercizio 16. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \bar{z}dz,$$

ove $\gamma(t) = e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Svolgimento. Abbiamo

$$\int_\gamma \bar{z}dz = \int_0^{2\pi} e^{it}e^{-it}idt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Esercizio 17. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \mathrm{Im}(z^2)dz,$$

ove $\gamma(t) = t + i(4t - t^2)$, con $t \in [0, 4]$.

Svolgimento. Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathrm{Im}(z^2)dz &= \int_0^4 \mathrm{Im}\left(t^2 - (4t - t^2)^2 + 2it(4t - t^2)\right)(1 + 4i - 2t)dt \\ &= \int_0^4 2t(4t - t^2)(1 + 4i - 2t)dt.\end{aligned}$$

Da qui si conclude facilmente il conto con le conoscenze base da Analisi 1.

Esercizio 18. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma e^z dz,$$

ove $\gamma(t) = t + it$, con $t \in [0,1]$.

Svolgimento. Esercizio per casa.