Metodi Matematici per l'Ingegneria

Davide Buoso

Esercitazione del 13/04/2016

Un po' di teoria

Ricordiamo che una serie è una somma infinita $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, e diremo **termine generale** la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Diremo inoltre **somma parziale** di ordine n la somma $\sum_{k=0}^{n} a_k$, e diremo che la serie è **convergente** se il $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ esiste finito, e in tal caso definiamo la **somma della serie** come

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Ricordiamo poi qui di seguito alcuni modi per studiare il carattere di convergenza di una serie.

- **Convergenza assoluta**: se $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge, allora pure $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.
- **Principio del confronto**: se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, e $0 \le b_k \le a_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora pure $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge.
- **Criterio della radice**: se $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.
- **Criterio del rapporto**: se $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

Introduciamo ora le **serie di potenze**, ovvero serie il cui termine generale è nella forma $a_k(z - z_0)^k$:

$$\sum_k a_k (z - z_0)^k.$$

Lo studio delle serie di potenze è giustificato dal Teorema di Taylor per le funzioni di variabile reale, e per il fatto che le funzioni olomorfe sono analitiche. Ricordiamo che una funzione f si dice **analitica** in un intorno di un punto z_0 se, per ogni z "vicino" a z_0 si può scrivere f come somma di una serie di potenze, e in particolare

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Si può dimostrare che l'insieme di convergenza assoluta di una serie di potenze è una palla centrata in z_0 (che è talvolta detto **centro** della serie di potenze), la cui chiusura contiene l'insieme di convergenza semplice. Il raggio della suddetta palla si dice **raggio di convergenza** della serie e dipende esclusivamente dalla successione dei coefficienti (a_k) della serie. Se poniamo R tale quantità, si può mostrare facilmente che

$$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|},$$

o similmente che

$$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

con l'apposita convenzione che $0^{-1} = \infty, \infty^{-1} = 0$. Se una serie di potenze ha raggio di convergenza infinito significa che converge (assolutamente) su tutto $\mathbb{C}$, mentre se ha raggio di convergenza nullo non converge mai. La situazione in cui ambo i limiti non esistono[1] richiede strumenti più precisi, che noi non tratteremo.

NOTA BENE: in questa lezione facciamo esercizi solo su serie centrate in $z = 0$ in quanto, come abbiamo detto, il centro di una serie di potenze non ha legami col suo raggio di convergenza.

Esercizi

Esercizio 1. Determinare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_n \frac{z^n}{n^2}.$$

Svolgimento. Il raggio di convergenza R della serie sarà

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Alternativamente, è possibile calcolare il raggio di convergenza anche nel modo seguente

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1,$$

ove abbiamo usato il limite notevole

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Esercizio 2. Determinare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_n (-1)^n \frac{z^n}{n}.$$

Svolgimento. Il raggio di convergenza R della serie sarà

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

[1]Ricordiamo che il criterio della radice è più fine del criterio del rapporto, quindi è possibile che il limite coi rapporti non esista mentre l'altro sìIn particolare, se esistono entrambi allora coincidono.

Alternativamente, è possibile calcolare il raggio di convergenza anche nel modo seguente
$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

ATTENZIONE! Sia qui che nell'esercizio precedente, nulla possiamo dire a priori sul carattere di convergenza della serie sul bordo dell'insieme di convergenza! A titolo d'esempio, è sufficiente considerare la serie di quest'esercizio valutata in $z = 1$.

Esercizio 3. Determinare il raggio di convergenza della serie
$$\sum_n n! z^n.$$

Svolgimento. Vediamo subito che ci conviene calcolare il raggio di convergenza usando i rapporti. Abbiamo
$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Esercizio 4. Determinare il raggio di convergenza della serie esponenziale
$$\sum_n \frac{z^n}{n!}.$$

Svolgimento. Vediamo subito che ci conviene calcolare il raggio di convergenza usando i rapporti. Abbiamo
$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Esercizio 5. Determinare il raggio di convergenza della serie
$$\sum_n \frac{z^{2n}}{2^{n^2}}.$$

Svolgimento. In questo caso **dobbiamo prestare molta attenzione ai coefficienti della serie**. Osserviamo che i coefficienti a_k sono dati da
$$a_k = \begin{cases} 2^{-(k/2)^2}, & \text{per } k \text{ pari}, \\ 0, & \text{per } k \text{ dispari}. \end{cases}$$

È chiaro che non possiamo calcolare il raggio di convergenza usando la formula
$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$
perché l'argomento del limite non è definito. Dovremo usare la radice.

Osserviamo che
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{2^{-k^2}} = \lim_{k\to\infty} 2^{-k/2} = 0,$$
da cui deduciamo che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$
e quindi $R = \infty$.

Esercizio 6. Scrivere lo sviluppo di Taylor centrato in $z_0 = 0$ delle seguenti funzioni
$$\sin z,\ \sinh z, \cos z,\ \cosh z,$$
e determinarne il raggio di convergenza.

Svolgimento. Ricordiamo che
$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 4p,\ p \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{se } k = 4p+1,\ p \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{se } k = 4p+2,\ p \in \mathbb{N}, \\ -1, & \text{se } k = 4p+3,\ p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
Quindi otteniamo che
$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
Una maniera alternativa di ricavare la serie è di sfruttare la definizione che fa uso dell'esponenziale. In quel caso allora dobbiamo comunque giustificare l'espressione, dicendo che una funzione analitica si può scrivere in maniera unica come serie di potenze (sviluppata attorno ad un punto), in quanto tale serie deve coincidere con lo sviluppo di Taylor.

Per quanto riguarda il raggio di convergenza, ricordiamo che
$$\lim_k \sqrt[k]{k!} = \infty,$$
da cui si ricava facilmente che il raggio di convergenza è infinito a partire dal limite
$$\lim_k \sqrt[k]{\frac{|\sin^{(k)}(0)|}{k!}}.$$
Il resto è lasciato come esercizio per casa.

Esercizio 7. Scrivere lo sviluppo di Taylor centrato in $z_0 = 0$ di
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Svolgimento. Anzitutto osserviamo che la funzione è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Questo ci dice che la serie avrá un raggio di convergenza non maggiore di 1.

Il calcolo della serie a mezzo delle derivate di f, seppur possibile, sembra complicato in quanto originerà funzioni razionali di gradi sempre maggiori. Ricordiamo allora che
$$\sum_{k=0}^{\infty} w^k = \frac{1}{1-w},$$
per ogni $w \in \mathbb{C}$ tale che $|w| < 1$. In particolare,
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k},$$
per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|-z^2| < 1$, ovvero $|z| < 1$. Sappiamo allora che la serie converge assolutamente per $|z| < 1$, mentre diverge per $z = \pm i$. Ne consegue che il raggio di convergenza vale precisamente 1.