Metodi Matematici per l'Ingegneria

Davide Buoso

Esercitazione del 22/04/2016

Un po' di teoria

Funzioni olomorfe e singolarità isolate

Sia f una funzione olomorfa con una singolarità isolata, ovvero f è olomorfa in $D \setminus \{z_0\}$, ove D è un aperto e z_0 è contenuto in D assieme a tutta una palla, ovvero esiste $R > 0$ tale che $B_R(z_0) \subseteq D$. In particolare possiamo considerare le corone $C_{z_0}(r, R) = \{r < |z - z_0| < R\} \subset D$ per opportuni valori di r, R. Si può mostrare che allora in $C_{z_0}(r, R)$ si può espandere f in **serie di Laurent**:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

ove i coefficienti a_k sono dati dalla formula

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz,$$

con γ un qualsiasi cammino di Jordan contenuto in $C_{z_0}(r, R)$.

Alcuni commenti sugli sviluppi di Laurent.

- Una funzione può avere molte singolarità. Per ogni singolarità isolata si ha un diverso sviluppo di Laurent nelle corone attorno alla singolarità.
- Similmente a quanto accade per gli sviluppi di Taylor di una funzione olomorfa, le dimensioni massime della corona in cui si possono fare gli sviluppi di Laurent sono i massimi possibili. In particolare, il raggio interno r può essere scelto nullo ($r = 0$), ottenendo così una palla bucata. Il raggio esterno R, similmente, è il massimo per cui la corona giace nel dominio D della funzione (ovvero finché non si tocca un'altra singolarità).
- Gli sviluppi di Laurent si applicano a singolarità isolate. Singolarità non isolate, come ad esempio nel caso del logaritmo principale, hanno un comportamento differente.

Le singolarità vengono classificate in base ai coefficienti degli sviluppi di Laurent. Si presentano tre casi:

- se i coefficienti ad indice negativo ($k < 0$) sono tutti nulli, allora lo sviluppo di Laurent è in realtà uno sviluppo di Taylor e si parla di **singolarità eliminabile**;

- se esiste un k_0 (negativo) tale che $a_k = 0$ per ogni $k < k_0$ (ovvero i coefficienti non nulli sono in numero finito), si parla di **singolarità polare** o **polo**. L'**ordine** (o **molteplicità**) del polo è l'indice dell'ultimo coefficiente non nullo;
- se invece i coefficienti non nulli sono infiniti, si parla di **singolarità essenziale**.

Una funzione che presenti solo poli e singolarità eliminabili (e quindi senza singolarità essenziali) si dice **meromorfa**.

Il Teorema dei Residui

Uno degli strumenti più importanti nel calcolo di integrali (complessi e reali) è senza ombra di dubbio il Teorema dei Residui. Ricordiamo anzitutto che, se f si sviluppa in serie di Laurent attorno a z_0

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

allora diremo **residuo di f in z_0**, $\mathrm{Res}_{z_0}(f)$, il valore del coefficiente a_{-1}. In particolare

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz,$$

ove γ è una qualunque curva di Jordan che avvolge la sola singolarità z_0 di f con $[\gamma] \subset \mathrm{Dom}(f)$.

Sia ora f definita nell'aperto D tranne al più un numero finito di punti $z_1, \dots, z_h$. Sia inoltre γ una curva di Jordan contenuta in D che non tocca le singolarità di f, ovvero $[\gamma] \subset D \setminus \{z_1, \dots, z_h\}$. Allora si ha che

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_j \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{Res}_{z_j} f.$$

Ovvero, l'integrale curvilineo di una funzione dipende **esclusivamente** dai residui delle singolarità che vengono avvolte dal cammino.

Data l'importanza nel conoscere i residui di una funzione, diamo un modo veloce per calcolare il residuo di una funzione senza la necessità di calcolare integrali o sviluppare la serie di Laurent **nel caso in cui la singolarità sia un polo semplice**:

$$\mathrm{Res}_w(f) = \lim_{z \to w} (z - w) f(z).$$

In particolare, se il limite al membro di destra esiste finito allora la singolarità è un polo semplice e vale l'uguaglianza.

Esercizi

Esercizio 1. Determinare lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

attorno all'origine ($z = 0$), e stabilire il carattere della singolarità.

Svolgimento. Osserviamo che il calcolo dei coefficienti tramite gli integrali è quantomeno macchinoso. D'altro canto, ricordiamo che

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!},$$

e di conseguenza

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = \sum_{k=0}^{-\infty} \frac{z^k}{(-k)!},$$

che è lo sviluppo di Laurent in quanto tale sviluppo è unico. È immediato verificare che la singolarità è essenziale.

Esercizio 2. Determinare lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

attorno all'origine ($z = 0$), e stabilire il carattere della singolarità.

Svolgimento. Ricordiamo che

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

da cui otteniamo immediatamente che

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}.$$

In particolare, la singolarità è eliminabile e la funzione risulta olomorfa intera.

Esercizio 3. Determinare lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^3} - z + 1$$

attorno all'origine ($z = 0$), e stabilire il carattere della singolarità.

Svolgimento. Osserviamo che

$$f(z) = -\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + 1 - z.$$

Ne segue che $z = 0$ è un polo di molteplicità 3.

Esercizio 4. Determinare gli sviluppi di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z}$$

attorno alle singolarità, e stabilirne il rispettivo carattere.

Svolgimento. Osserviamo preliminarmente che le singolarità si hanno in $z = 0, -1$. Abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{z+1}\,\frac{1}{z} = \frac{1}{z+1}\,\frac{-1}{1-(z+1)} = -\frac{1}{z+1}\sum_{k=0}^{+\infty}(z+1)^k = -\sum_{k=-1}^{+\infty}(z+1)^k.$$

Ne segue che $z = -1$ è un polo di molteplicità 1.

D'altro canto

$$f(z) = \frac{1}{z+1}\,\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^k = \sum_{k=-1}^{+\infty}(-1)^{k+1} z^k.$$

Ne segue che pure $z = 0$ è un polo di molteplicità 1.

Esercizio 5. Determinare gli sviluppi di Laurent della funzione

$$f(z) = -\frac{1}{z^2-3z+2}$$

attorno ad ogni singolarità, e stabilirne il rispettivo carattere.

Svolgimento. Osserviamo anzitutto che

$$z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2),$$

quindi

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

È evidente che le singolarità sono $z = 1$ e $z = 2$. Ora osserviamo che

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{k=0}^{+\infty}(z-1)^k,$$

e ne segue che lo sviluppo di f attorno a $z = 1$ è

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{+\infty}(z-1)^k.$$

In particolare, $z = 1$ è polo semplice.

D'altro canto, notiamo che

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-(2-z)} = \sum_{k=0}^{+\infty}(2-z)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(z-2)^k,$$

e ne segue che lo sviluppo di f attorno a $z = 2$ è

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{+\infty}(-1)^k(z-2)^k.$$

Quindi anche $z = 2$ è un polo di molteplicità 1.

Esercizio 6. Determinare lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = ize^z$$

attorno a $z = 0$, stabilire il carattere della singolarità e determinare il residuo in quel punto.

Svolgimento. Esercizio per casa.

Esercizio 7. Determinare lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = z \cos \frac{1}{z^2}$$

attorno a $z = 0$, stabilire il carattere della singolarità e determinare il residuo in quel punto.

Svolgimento. Esercizio per casa.

Esercizio 8. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4 - 1},$$

ove γ è la circonferenza centrata in $z = 0$ e di raggio $\rho = 2$.

Svolgimento. Osserviamo che l'integranda ha 4 poli semplici in $z = \pm 1, \pm i$, e la curva γ è di Jordan e avvolge tutti i poli. Procediamo quindi col calcolo dei residui dell'integranda.

$$\mathrm{Res}_1 f = \lim_{z \to 1} \frac{1}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{Res}_{-1} f = \lim_{z \to -1} \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = -\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{Res}_i f = \lim_{z \to i} \frac{1}{(z+i)(z^2-1)} = \frac{i}{4}, \quad \mathrm{Res}_{-i} f = \lim_{z \to -i} \frac{1}{(z-i)(z^2-1)} = -\frac{i}{4}.$$

È ora immediato osservare che l'integrale vale zero.

Come esercizio per casa, calcolare gli sviluppi di Laurent dell'integranda nei suoi poli

Esercizio 9. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma e^{\frac{1}{z}} dz,$$

ove $\gamma(t) = \cos t + 3i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Svolgimento. Osserviamo che l'integranda è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, e che $z = 0$ è singolarità essenziale, il cui residuo è stato già calcolato negli esercizi precedenti e vale $\mathrm{Res}_0 f = 1$. Inoltre, la curva γ è di Jordan e avvolge la singolarità. Per il Teorema dei Residui è allora immediato osservare che l'integrale vale $2\pi i$.

Esercizio 10. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma e^{\frac{z}{1-z}} dz,$$

ove $\gamma(t) = 5\cos t + 2i\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Svolgimento. Osserviamo che l'integranda è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, e che la curva γ è di Jordan e avvolge la singolarità. Osserviamo che

$$\frac{z}{1-z} = -1 + \frac{1}{1-z},$$

e quindi

$$e^{\frac{z}{1-z}} = \frac{1}{e} e^{\frac{1}{1-z}},$$

da cui otteniamo lo sviluppo di Laurent attorno a $z = 1$

$$e^{\frac{z}{1-z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!e} \frac{1}{(z-1)^k}.$$

In particolare, $\mathrm{Res}_1 f = -\frac{1}{e}$. Quindi, segue che l'integrale vale $-\frac{2\pi i}{e}$.

Esercizio 11. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z} dz,$$

ove $\gamma(t) = \cos t + 3i\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Svolgimento. Osserviamo che l'integranda è olomorfa intera, quindi l'integrale è nullo essendo γ di Jordan.

Esercizio 12. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{\sin \frac{1}{z}}{z} dz,$$

ove $\gamma(t) = 3\cos t + 2 + 3i\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Svolgimento. Osserviamo che l'integranda presenta una possibile singolarità in $z = 0$, mentre è olomorfa al di fuori di quel punto. Inoltre, la curva γ è di Jordan e avvolge il punto $z = 0$. Ricordiamo che

$$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

da cui

$$\frac{\sin \frac{1}{z}}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k-2}.$$

In particolare, in $z = 0$ l'integranda presenta una singolarità essenziale con residuo nullo, pertanto nullo è anche l'integrale.

Esercizio 13. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 3z + 2},$$

ove $\gamma(t) = 3\cos t + 3i\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Svolgimento. Ricordiamo dall'esercizio 5 che

$$\mathrm{Res}_1 f = -1, \quad \mathrm{Res}_2 f = 1,$$

e che la curva γ è di Jordan e avvolge ambo i poli (che sono le uniche singolarità dell'integranda). Segue dunque che l'integrale è nullo.

Esercizio 14. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma z\cos(\frac{1}{z})dz,$$

ove γ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio unitario.

Svolgimento. Osserviamo che l'integranda presenta una singolarità in $z = 0$, mentre è olomorfa al di fuori di quel punto. Inoltre, la curva γ è di Jordan e avvolge il punto $z = 0$. Ricordiamo che

$$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!},$$

da cui

$$z\cos\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2k+1}.$$

In particolare, in $z = 0$ l'integranda presenta una singolarità essenziale con residuo $\mathrm{Res}_0 f = -\frac{1}{2}$, di conseguenza l'integrale vale $-\pi i$.

Esercizio 15. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{(z+i)(2z+3)(z^2+2)},$$

al variare di $r > 0$, ove γ_r è la circonferenza centrata nell'origine di raggio r.

Svolgimento. Esercizio per casa