Metodi Matematici per l'Ingegneria

Davide Buoso

Esercitazione del 26/04/2016

Un po' di teoria

Diamo una definizione dell'**angolo di centro** z_0 **e apertura** θ_1, θ_2 (per $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$)

$$A_{z_0}(\theta_1, \theta_2) = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + re^{i\theta}, r > 0, \theta \in (\theta_1, \theta_2)\}.$$

Enunciamo due risultati che sono molto utili nel calcolo di integrali.

Lemma del cerchio grande. Sia f continua in $A_{z_0}(\theta_1, \theta_2)$ per qualche z_0, θ_1, θ_2, e sia

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in A_{z_0}(\theta_1, \theta_2)}} (z - z_0) f(z) = k \in \mathbb{C}.$$

Allora si ha che

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) k,$$

ove γ_r è l'arco di circonferenza di centro z_0 e raggio r contenuto nell'angolo $A_{z_0}(\theta_1, \theta_2)$, ovvero $\gamma_r(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$ per $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$.

In questo caso, osserviamo che

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in A_{z_0}(\theta_1, \theta_2)}} (z - z_0) f(z) = k \quad \Leftrightarrow \lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in A_{z_0}(\theta_1, \theta_2)}} z f(z) = k.$$

Quindi ci si può limitare al calcolo del limite più facile.

Lemma del cerchio piccolo. Sia f continua in $A_{z_0}(\theta_1, \theta_2)$ per qualche z_0, θ_1, θ_2, e sia

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A_{z_0}(\theta_1, \theta_2)}} (z - z_0) f(z) = k \in \mathbb{C}.$$

Allora si ha che

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) k,$$

ove γ_r è l'arco di circonferenza di centro z_0 e raggio r contenuto nell'angolo $A_{z_0}(\theta_1, \theta_2)$, ovvero $\gamma_r(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$ per $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$.

Questi due lemmi ci dicono essenzialmente che, se sappiamo come si comporta la funzione al limite (all'infinito o al centro dell'angolo), sappiamo anche qual è il comportamento limite dell'integrale sugli archi di cerchio (all'infinito o al centro dell'angolo, rispettivamente). In particolare, se al limite la funzione (riscalata) si annulla, ovvero $k = 0$, allora anche l'integrale deve annullarsi.

Enunciamo inoltre il seguente risultato per il calcolo dei residui per singolarità polari.

Lemma. Sia f una funzione olomorfa con un polo di ordine m in z_0. Allora

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{\left.[(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}\right|_{z=z_0}}{(m-1)!}.$$

La dimostrazione di questo fatto è immediata: se f ha un polo di ordine m in z_0, allora $(z - z_0)^m f(z)$ è olomorfa in z_0 (si vede subito sfruttando lo sviluppo di Laurent), e il coefficiente del termine di ordine -1 (cioè il residuo) è ora all'ordine $m - 1$. Derivando $(m - 1)$-volte lo riotteniamo, a meno di un fattore $(m - 1)!$ causato dall'operazione di derivazione.

Esercizi

Esercizio 1. Si calcoli l'integrale (in $\mathbb{R}$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

Svolgimento. Osserviamo preliminarmente che l'integrale richiesto esiste finito: infatti, l'integranda è positiva e all'infinito è dominata da $\frac{1}{x^4}$ che ammette integrale improprio finito.

Per calcolare questo tipo di integrali si ricorre al Teorema dei Residui combinato col Lemma del cerchio grande. Notiamo anzitutto che

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^4 + 1} = 0,$$

e quindi, ponendo ad esempio γ_r la semicirconferenza centrata nell'origine di raggio r giacente nel semipiano $\{\mathrm{Im}\ z > 0\}$, per il cerchio grande abbiamo

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^4 + 1} = 0.$$

Se poniamo allora δ_r il cammino giacente sulla retta reale che va da $-r$ ad r, otteniamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{+r} \frac{dx}{x^4 + 1} = \lim_{r\to\infty} \int_{\delta_r} \frac{dz}{z^4 + 1} = \lim_{r\to\infty} \int_{\delta_r+\gamma_r} \frac{dz}{z^4 + 1}.$$

Quindi è sufficiente calcolare l'integrale nell'ultimo limite. Questo lo possiamo fare sfruttando i residui. Osserviamo che l'integranda presenta 4 poli semplici in corrispondenza delle radici quarte di -1, ovvero per

$$z = e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Di queste, solo due sono contenute in $\operatorname{Int}(\delta_r+\gamma_r)$, quelle per $k=0,1$. Calcoliamone dunque i rispettivi residui.

$$\operatorname{Res}_{e^{\frac{1}{4}\pi i}} f = \left.\frac{1}{(z-e^{\frac{5}{4}\pi i})(z^2+i)}\right|_{z=e^{\frac{1}{4}\pi i}} = \frac{1}{2i(e^{\frac{1}{4}\pi i}-e^{\frac{5}{4}\pi i})} = \frac{1}{4ie^{\frac{1}{4}\pi i}} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}.$$

$$\operatorname{Res}_{e^{\frac{3}{4}\pi i}} f = \left.\frac{1}{(z-e^{\frac{7}{4}\pi i})(z^2-i)}\right|_{z=e^{\frac{3}{4}\pi i}} = \frac{1}{-2i(e^{\frac{3}{4}\pi i}-e^{\frac{7}{4}\pi i})} = \frac{1}{-4ie^{\frac{3}{4}\pi i}} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

Dal Teorema dei Residui segue allora che[1]

$$\int_{\delta_r+\gamma_r} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \frac{-1-i+1-i}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad \forall r>1.$$

In particolare,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 2. Si calcolino gli integrali seguenti (in $\mathbb{R}$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4+1}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(x+1)dx}{(x^2+1)^2}.$$

Svolgimento. Esercizio per casa.

Esercizio 3. Si calcoli l'integrale (in $\mathbb{R}$)

$$\int_0^{2\pi} \frac{|1-\alpha^2|}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2}dt, \quad \text{ove } \alpha\in\mathbb{C}, |\alpha|\neq 1.$$

Svolgimento. Iniziamo osservando che

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2},$$

per cui, posto $z=e^{it}$ abbiamo

$$\cos t = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}.$$

Inoltre, abbiamo anche che

$$dz = d(e^{it}) = izdt,$$

per cui, ponendo γ la circonferenza centrata nell'origine e di raggio unitario, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{|1-\alpha^2|}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2}dt &= \int_\gamma \frac{|1-\alpha^2|}{1-\alpha(z+\frac{1}{z})+\alpha^2}\frac{dz}{iz} \\ &= \int_\gamma \frac{-i|1-\alpha^2|}{z-\alpha z^2-\alpha+\alpha^2 z}dz = \int_\gamma \frac{-i|1-\alpha^2|}{z(1-\alpha z)-\alpha(1-\alpha z)}dz \\ &= \int_\gamma \frac{-i|1-\alpha^2|}{(z-\alpha)(1-\alpha z)}dz.\end{aligned}$$

[1]Se $r<1$, l'integranda è olomorfa; per $r>1$ si sfrutta invece appieno la potenza del Teorema dei Residui.

A questo punto osserviamo che l'integranda presenta 2 poli semplici in $z = \alpha, \frac{1}{\alpha}$, e solo uno si trova in $\mathrm{Int}(\gamma)$. Abbiamo che

$$\mathrm{Res}_\alpha f = \frac{-i|1-\alpha^2|}{1-\alpha z}\bigg|_{z=\alpha} = \frac{-i|1-\alpha^2|}{1-\alpha^2},$$

e

$$\mathrm{Res}_{\frac{1}{\alpha}} f = \frac{i|1-\alpha^2|}{\alpha(z-\alpha)}\bigg|_{z=\frac{1}{\alpha}} = \frac{i|1-\alpha^2|}{1-\alpha^2}.$$

Ne segue quindi che l'integrale vale $2\pi\frac{|1-\alpha^2|}{1-\alpha^2}$ se $|\alpha| < 1$, mentre vale $-2\pi\frac{|1-\alpha^2|}{1-\alpha^2}$ se $|\alpha| > 1$. In particolare, se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora l'integrale vale 2π.

Esercizio 4. Si calcoli l'integrale (in $\mathbb{R}$)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\theta)}{2+\cos\theta}d\theta.$$

Svolgimento. Sfruttando l'idea dell'esercizio precedente, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\theta)}{2+\cos\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2+\cos\theta}d\theta \\ = -\int_\gamma \frac{z^2-\frac{1}{z^2}}{(4+z+\frac{1}{z})z}dz = \int_\gamma \frac{1-z^4}{z^2(z^2+4z+1)}dz.\end{aligned}$$

Ora osserviamo che l'integranda presenta un polo doppio nell'origine e due poli semplici in $z = -2 \pm \sqrt{3}$. Tuttavia, $z = -2 - \sqrt{3}$ ricade al di fuori del circolo unitario, dunque non ci tange. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{-2+\sqrt{3}} f = \frac{1-z^4}{z^2(z+2+\sqrt{3})}\bigg|_{z=-2+\sqrt{3}} &= \frac{\frac{1}{z^2}-z^2}{z+2+\sqrt{3}}\bigg|_{z=-2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{(-2-\sqrt{3})^2-(-2+\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}} = 4,\end{aligned}$$

e inoltre

$$\mathrm{Res}_0 f = \left(\frac{1-z^4}{z^2+4z+1}\right)'\bigg|_{z=0} = \frac{4z^3(z^2+4z+1)+(z^4-1)(2z+4)}{(z^2+4z+1)^2}\bigg|_{z=0} = -4$$

Segue subito che l'integrale è nullo.

Si poteva pure osservare che, essendo l'integranda periodica di periodo 2π, allora gli estremi di integrazione possono essere traslati in una qualsiasi posizione, ad esempio

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\theta)}{2+\cos\theta}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2\theta)}{2+\cos\theta}d\theta.$$

L'integrale di destra si vede banalmente essere nullo perché l'integranda è una funzione dispari.

Esercizio 5. Si calcoli l'integrale (in $\mathbb{R}$)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}.$$

Svolgimento. Esercizio per casa.