Metodi Matematici per l'Ingegneria

Davide Buoso

Esercitazione del 13/05/2016

Un po' di teoria

Generalità sulle distribuzioni

Ricordiamo che il supporto di una funzione è l'insieme dei punti "dove non si annulla", ovvero

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}.$$

In altre parole, fuori dal suo supporto la funzione è nulla e dunque ha senso restringere lo studio delle sue proprietà all'interno del supporto.

Possiamo ora definire l'insieme delle **funzioni test**:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{D} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \mathrm{supp}(f) \text{ è compatto}\}.$$

Lo spazio delle funzioni test $\mathcal{D}$ viene munito della topologia indotta dalla convergenza uniforme di tutte le derivate[1].

Chiameremo **distribuzioni** gli elementi del duale topologico di $\mathcal{D}$, ovvero

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) = \mathcal{D}' = \{T : \mathcal{D} \to \mathbb{R} : T \text{ è lineare e continua}\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{D}'$ è a sua volta spazio lineare: infatti, date $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$, allora $\lambda T_1 + \mu T_2 \in \mathcal{D}'$.

Ricordiamo che, data una funzione f localmente integrabile (ovvero $f \in R^1_{loc}$), allora essa induce una distribuzione nel modo seguente:

$$T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}} f\phi dx, \ \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

(È facile verificare che quest'espressione ha senso). Le distribuzioni indotte da funzioni localmente integrabili si dicono **regolari**. Non tutte le distribuzioni sono però regolari! Ad esempio la delta di Dirac non è regolare.

Come notazione, si può usare uno dei due modi seguenti: $T(\phi) = < T, \phi >$.

Ricordiamo alcune proprietà delle distribuzioni.

- Siccome sono funzionali continui, se $\phi_n \to \phi$ (con convergenza uniforme di tutte le derivate), allora $T(\phi_n) \to T(\phi)$.
- Moltiplicare tra loro due distribuzioni è un'operazione insensata, mentre ha invece senso moltiplicare una funzione C^∞ per una distribuzione:

  $$< \psi T, \phi > := < T, \psi\phi > .$$

  Questo si può fare in particolare se $\psi \in \mathcal{D}$.

[1] Questa topologia è metrizzabile ma non normabile, quindi $\mathcal{D}$ non è spazio di Banach.

- Le distribuzioni si possono derivare infinite volte: infatti, per farlo si "scaricano" le derivate sulle funzioni test[2], nel modo seguente:

$$< T^{(n)}, \phi >:= (-1)^n < T, \phi^{(n)} > .$$

- Si può "traslare" una distribuzione: proprio come per le derivate, possiamo scaricare la traslazione sulla funzione test. Sia tr_y la traslazione tale che $\mathrm{tr}_y(x) = x + y$. Allora

$$< \mathrm{tr}_y \circ T, \phi >=< T, \mathrm{tr}_{-y} \circ \phi >=< T, \phi(\cdot - y) > .$$

  Attenzione al cambio di segno nella traslazione che è stata scaricata sulla funzione test! Se inoltre la distribuzione è regolare, ovvero se esiste f tale che $T = T_f$, allora si ha che $\mathrm{tr}_y \circ T_f = T_{\mathrm{tr}_y \circ f} = T_{f(\cdot + y)}$ (in questo caso il segno della traslazione non cambia).

Possiamo anche stabilire una nozione di convergenza per le distribuzioni. Data una successione di distribuzioni $(T_n)_n$, diremo che converge alla distribuzione T,

$$T_n \to T,$$

se e solo se, per ogni funzione test $\phi \in \mathcal{D}$ si ha che

$$< T_n, \phi >\to< T, \phi > .$$

Quest'ultima convergenza deve essere verificata *per ogni* funzione test, non è infatti sufficiente che sia verificata solo per qualche funzione test.

Supporto e convoluzione per le distribuzioni

Così come abbiamo definito il supporto di una funzione, è possibile estendere questo concetto anche alle distribuzioni. Se per una funzione il supporto è dove essa non si annulla, anche per una distribuzione vale lo stesso concetto. Data una distribuzione T, il suo supporto è il luogo dei punti ove essa agisce in maniera non banale, ovvero[3]

$$\mathrm{supp}\ T = (\cup\{A \text{ aperto t.c., se } \mathrm{supp}(\phi) \subset A, \text{ allora} < T, \phi >= 0\})^c .$$

In particolare, il supporto di una distribuzione è dove la funzione "riesce a vedere" le funzioni test. Ora è pure possibile parlare di distribuzioni a supporto compatto.

Similmente, è possibile estendere alle distribuzioni pure il concetto di prodotto di convoluzione. Ricordiamo che, date f e g due funzioni, il loro prodotto di convoluzione è definito come

$$f * g(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y - x)dx.$$

Questa definizione ha senso sotto alcune ipotesi di integrabilità. Per esempio, è sufficiente assumere che le funzioni siano continue ed una delle sue sia a supporto compatto.

[2] Le funzioni test si chiamano così proprio perché servono a scaricare le derivate.

[3] Purtoppo la definizione formale passa attraverso gli insiemi dove la distribuzione "non vede" le funzioni.

Date ora T ed S due convoluzioni, di cui una a supporto compatto, possiamo definirne il prodotto di convoluzione nel modo seguente

$$< T * S, \phi >:=< T, < \mathrm{tr}_{-}S, \mathrm{tr}_{-}\phi >>,$$

ove l'argomento della traslazione diventa a sua volta la variabile nell'accoppiamento con T. Non è difficile vedere che la convoluzione di distribuzioni gode delle stesse proprietà della convoluzione tra funzioni. Inoltre

$$T_f * T_g = T_{f*g},$$

per qualsiasi coppia di f, g localmente integrabili di cui almeno una a supporto compatto.

Esercizi

Esercizio 1. Verificare che $f(x) = e^x$ induce una distribuzione.

Svolgimento. Osserviamo che f è localmente integrabile, dunque ci aspettiamo che induca una distribuzione. Sia ora $\phi \in \mathcal{D}$. Abbiamo

$$< T_f, \phi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f\phi dx = \int_{\inf \mathrm{supp}(\phi)}^{\sup \mathrm{supp}(\phi)} f\phi dx \leq ||\phi||_\infty \int_{\inf \mathrm{supp}(\phi)}^{\sup \mathrm{supp}(\phi)} f dx,$$

da cui è chiaro che il funzionale è continuo. Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che l'integranda si annulla non appena si va al di fuori del compatto $[\inf \mathrm{supp}(\phi), \sup \mathrm{supp}(\phi)]$. La linearità invece segue banalmente dalla definizione.

Esercizio 2. Verificare che le funzioni seguenti inducono delle distribuzioni:

$$x^2 + x,\ \cos x + 1,\ \sinh(3x),\ \log(|x| + 1),\ \sqrt[4]{|x + 2|}.$$

Svolgimento. Esercizio per casa.

Esercizio 3. Verificare che la delta di Dirac

$$\delta_0(\phi) = \phi(0),$$

è una distribuzione. Si faccia lo stesso per la sua derivata.

Svolgimento. La linearità è immediata. Per la continuità, si osservi che

$$|\delta_0(\phi)| = |\phi(0)| \leq ||\phi||_\infty.$$

Ricordiamo che la derivata della delta di Dirac si può definire come

$$\delta_0'(\phi) = -\phi'(0).$$

Anche qui la linearità è banale, mentre per la continuità si ha

$$|\delta_0'(\phi)| = |\phi'(0)| \leq ||\phi'||_\infty.$$

Esercizio 4. Sia f una funzione localmente integrabile. Si verifichi che

$$< T_{f(\cdot+y)}, \phi >=< T_f, \phi(\cdot - y) > .$$

In altre parole, si verifichi che $\mathrm{tr}_y \circ T_f = T_{\mathrm{tr}_y \circ f}$.

Svolgimento. Abbiamo che

$$< T_{f(\cdot+y)}, \phi >= \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(z)\phi(z-y)dx =< T_f, \phi(\cdot - y) >,$$

ove nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato il cambio di variabili $z = x+y$ (ricordiamo che y qui è una costante).

Esercizio 5. Siano $x_n, x \in \mathbb{R}$ tali che $x_n \to x$. Si dimostri che

$$\delta_{x_n} \to \delta_x,$$

nel senso delle distribuzioni.

Svolgimento. Si ha che

$$\delta_{x_n}(\phi) = \phi(x_n) \to \phi(x) = \delta_x(\phi),$$

dove nel passaggio al limite abbiamo sfruttato la continuità della funzione test. Siccome questo limite è vero qualunque sia la funzione test ϕ, ne segue la tesi.

Esercizio 6. Si calcolino i limiti distribuzionali delle seguenti successioni di funzioni:

$$\frac{x^2}{n},\ n\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]},\ n^2\chi_{[-\frac{2}{n},\frac{2}{n}]},\ \sqrt{n}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}.$$

Svolgimento. Partiamo con $f_n(x) = \frac{x^2}{n}$. È chiaro che $f_n \to 0$ uniformemente sui compatti, ovvero che

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \to 0,$$

per qualsiasi $a, b \in \mathbb{R}$ fissati. Si ha allora che

$$| < T_{f_n}, \phi > | = \left| \int_{\mathbb{R}} f_n \phi dx \right| = \left| \int_{\mathrm{supp}(\phi)} f_n \phi dx \right| \leq \left(\sup_{x\in \mathrm{supp}(\phi)} |f_n(x)| \right) \int_{\mathrm{supp}(\phi)} |\phi| dx,$$

che ci dice che allora $f_n \to 0$ in senso distribuzionale.

Sia ora $f_n(x) = n\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)$. Osserviamo che

$$f_n(x) \to \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

È chiaro che

$$< T_{f_n}, \phi >= n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \phi dx,$$

da cui, se poniamo Φ una primitiva di ϕ, otteniamo

$$< T_{f_n}, \phi >= n(\Phi(\frac{1}{n}) - \Phi(-\frac{1}{n})) = \frac{\Phi(\frac{1}{n}) - \Phi(0)}{\frac{1}{n}} + \frac{\Phi(-\frac{1}{n}) - \Phi(0)}{-\frac{1}{n}}.$$

Ora prendiamo il limite per $n \to \infty$ e otteniamo

$$\lim_n < T_{f_n}, \phi >= 2\Phi'(0) = 2\phi(0) =< 2\delta_0, \phi > .$$

Ne segue che $n\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \to 2\delta_0$ nel senso delle distribuzioni.

Sia ora $f_n(x) = n^2\chi_{[-\frac{2}{n},\frac{2}{n}]}(x)$. È chiaro che

$$< T_{f_n}, \phi >= n^2 \int_{-\frac{2}{n}}^{\frac{2}{n}} \phi dx,$$

da cui, se poniamo Φ una primitiva di ϕ, otteniamo

$$< T_{f_n}, \phi >= n^2(\Phi(\frac{2}{n}) - \Phi(-\frac{2}{n})) = 2n\frac{\Phi(\frac{2}{n}) - \Phi(0)}{\frac{2}{n}} + 2n\frac{\Phi(-\frac{2}{n}) - \Phi(0)}{-\frac{2}{n}}.$$

È chiaro che, se scegliamo ϕ in modo che $\phi(0) > 0$, allora il membro di destra diverge a $+\infty$, da cui segue che $n^2\chi_{[-\frac{2}{n},\frac{2}{n}]}$ non ammette limite distribuzionale: se infatti ci fosse un limite distribuzionale T, allora il membro di destra dovrebbe convergere a $< T, \phi >\in \mathbb{R}$.

Sia infine $f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$. È chiaro che

$$< T_{f_n}, \phi >= \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{n}} \phi dx,$$

da cui, se poniamo Φ una primitiva di ϕ, otteniamo

$$< T_{f_n}, \phi >= \sqrt{n}(\Phi(\frac{1}{n}) - \Phi(0)) = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\Phi(\frac{1}{n}) - \Phi(0)}{\frac{1}{n}}.$$

Ora prendiamo il limite per $n \to \infty$ e otteniamo

$$\lim_n < T_{f_n}, \phi >= 0.$$

Ne segue che $\sqrt{n}\chi_{[0,\frac{1}{n}]} \to 0$ nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 7. Si calcolino i limiti distribuzionali delle seguenti successioni di funzioni:

$$\sin nx, \ \frac{\cos nx}{n}, \ e^{\frac{x}{n}}.$$

Svolgimento. Poniamo $f_n(x) = \sin nx$. Osserviamo che questa successione non ammette limite nemmeno puntualmente. Abbiamo che

$$< T_{f_n}, \phi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(nx)\phi(x)dx = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(nx)\phi'(x)dx,$$

ove nell'integrazione per parti abbiamo sfruttato la compatezza del supporto di ϕ. È ora facile vedere che l'integrale nel membro di destra è limitato da $\int_{\mathbb{R}} |\phi'|dx$ (che è una quantità finita) per ogni n, quindi ne segue che $f_n \to 0$ in senso distribuzionale.

Il resto è lasciato come esercizio per casa.

Esercizio 8. Si calcoli il limite della seguente successione di distribuzioni

$$T_n = n(\delta_{-\frac{1}{n}} - \delta_{\frac{3}{n^2}}).$$

Svolgimento. Esercizio per casa.

Esercizio 9. Sia f una funzione localmente integrabile. Mostrare che

$$\text{supp } T_f = \text{supp } f.$$

Svolgimento. Sia ϕ una funzione test tale che supp $\phi \cap \text{supp } f = \emptyset$. Allora

$$< T_f, \phi >= \int_{\mathbb{R}} f\phi dx = 0.$$

Questo ci dice che l'insieme di nullità di T_f coincide con quello di f. La tesi segue.

Esercizio 10. Sia T_n la distribuzione regolare associata alla funzione $n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$, e sia $S \in \mathcal{D}'$. Determinare (se esiste) il limite distribuzionale di

$$S * T_n.$$

Svolgimento. Anzitutto osserviamo che T_n ha supporto compatto, quindi il prodotto di convoluzione ha senso per ogni $S \in \mathcal{D}'$. Ricordiamo dagli esercizi precedenti che $T_n \to \delta_0$. Sia ora S una distribuzione qualsiasi. Possiamo scrivere

$$< S * T_n, \phi >< S, < T_n, \mathrm{tr}_-\phi >> \to < S, < \delta_0, \mathrm{tr}_-\phi >>=< S, \phi >,$$

dove abbiamo usato il fatto che $< \delta_0, \mathrm{tr}_-\phi >= \phi$. Questo conclude l'esercizio.