Metodi Matematici per l'Ingegneria

Davide Buoso

Esercitazione del 17/05/2016

Un po' di teoria

Data una funzione $f \in R^1(\mathbb{R})$, possiamo definire la sua **trasformata di Fourier**:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Diamo qui sotto uno specchietto sulle proprietà della trasformata di Fourier.

- Se $f \in R^1(\mathbb{R})$, allora $\hat{f}$ è una funzione continua. Inoltre, si vede facilmente che $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$. Si noti che in generale $\hat{f} \notin R^1(\mathbb{R})$.
- La trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ è un operatore lineare, e la sua inversa $\mathcal{F}^{-1}$ è

  $$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

  In particolare, se sia f che $\hat{f}$ sono in $R^1(\mathbb{R})$, allora

  $$f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \mathcal{F}(\check{f}).$$

- **Lemma di Riemann-Lebesgue**: $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.
- Le traslazioni vengono trasformate in modulazioni e viceversa:

  $$\mathcal{F}(f(\cdot - y))(\xi) = e^{-2\pi i \xi y} \hat{f}(\xi), \quad \mathcal{F}(e^{-2\pi i \omega \cdot} f)(\xi) = \hat{f}(\xi - \omega).$$

- La derivazione viene trasformata in moltiplicazione per polinomi e viceversa, ma sotto alcune ipotesi. Sia $f \in R^1(\mathbb{R})$. Se $f' \in R^1(\mathbb{R})$, allora

  $$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi \mathcal{F}(f)(\xi).$$

  Se $xf(x) \in R^1(\mathbb{R})$, allora $\hat{f}$ è derivabile e

  $$\mathcal{F}(f)'(\xi) = -2\pi i \mathcal{F}(\cdot f(\cdot))(\xi).$$

  Le formule per le derivate successive seguono facilmente per induzione.

- I prodotti di convoluzione vengono trasformati in prodotti e viceversa:

  $$\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \cdot \hat{g},$$

  e se $f \cdot g \in R^1(\mathbb{R})$,

  $$\mathcal{F}(f \cdot g) = \hat{f} * \hat{g}.$$

- I riscalamenti vengono trasformati in riscalamenti:

  $$\mathcal{F}(f(\tau \cdot))(\xi) = \frac{1}{|\tau|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\tau}\right).$$

Esercizi

Esercizio 1. Determinare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \chi_{[a-1,a]}(x)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Abbiamo

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a-1,a]}(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{a-1}^{a} e^{-2\pi i \xi x} dx \\ = \frac{-1}{2\pi i \xi} e^{-2\pi i \xi x} \bigg|_{x=a-1}^{x=a} = \frac{e^{2\pi i \xi} - 1}{2\pi i \xi} e^{-2\pi i a \xi}.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Determinare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x) \cos(ax)$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Ricordiamo anzitutto che

$$\cos(ax) = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2} = \frac{e^{-2\pi i \frac{-a}{2\pi} x} + e^{-2\pi i \frac{a}{2\pi} x}}{2},$$

quindi la moltiplicazione per il coseno la possiamo gestire come una modulazione. Calcoliamo allora la trasformata

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\chi_{[-a,a]}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-a,a]}(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-a}^{a} e^{-2\pi i \xi x} dx \\ = \frac{-1}{2\pi i \xi} e^{-2\pi i \xi x} \bigg|_{x=-a}^{x=a} = \frac{\sin(2\pi a \xi)}{\pi \xi}.\end{aligned}$$

A questo punto abbiamo che

$$\mathcal{F}\left(e^{-2\pi i \frac{a}{2\pi} \cdot} \chi_{[-a,a]}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\chi_{[-a,a]}\right)(\xi - \frac{a}{2\pi i}),$$

e che

$$\mathcal{F}\left(e^{-2\pi i \frac{-a}{2\pi} \cdot} \chi_{[-a,a]}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\chi_{[-a,a]}\right)(\xi + \frac{a}{2\pi i}),$$

quindi

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi a \xi + i a^2)}{2\pi \xi + i a} + \frac{\sin(2\pi a \xi - i a^2)}{2\pi \xi - i a}.$$

Esercizio 3. Determinare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \chi_{[-2a,2a]}(x) \sin(ax)$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Esercizio per casa.

Esercizio 4. Determinare la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Svolgimento. Abbiamo

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{1 + x^2} dx.$$

Calcoliamolo con l'ausilio del Teorema dei Residui. Posto γ_r la semicirconferenza centrata nell'origine di raggio r nel semipiano superiore, ricordando che

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ \mathrm{Re}z>0}} \frac{ze^{-2\pi i\xi z}}{1+z^2} = 0, \quad \text{se } \xi < 0,$$

grazie al Lemma del cerchio grande abbiamo che

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{r\to\infty} \left(\int_{-r}^{+r} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{1+z^2} dz + \int_{\gamma_r} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{1+z^2} dz \right).$$

Osserviamo che l'integranda ha un solo polo semplice all'interno della curva, nel punto $z = i$. Abbiamo che

$$\mathrm{Res}_i \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{1+z^2} = \lim_{z\to i} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{z+i} = \frac{e^{2\pi\xi}}{2i}.$$

Quindi

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{r\to\infty} 2\pi i \frac{e^{2\pi\xi}}{2i} = \pi e^{2\pi\xi}, \quad \text{se } \xi < 0.$$

Se invece consideriamo $\xi > 0$, sia stavolta γ_r la semicirconferenza centrata nell'origine di raggio r nel semipiano inferiore, abbiamo

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ \mathrm{Re}z<0}} \frac{ze^{-2\pi i\xi z}}{1+z^2} = 0, \quad \text{se } \xi > 0,$$

e grazie al Lemma del cerchio grande abbiamo che

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = -\lim_{r\to\infty} \left(-\int_{-r}^{+r} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{1+z^2} dz + \int_{\gamma_r} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{1+z^2} dz \right).$$

Osserviamo che l'integranda ha un solo polo semplice all'interno della curva, nel punto $z = -i$. Abbiamo che

$$\mathrm{Res}_{-i} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{1+z^2} = \lim_{z\to -i} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{z-i} = -\frac{e^{-2\pi\xi}}{2i}.$$

Quindi

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{r\to\infty} 2\pi i \frac{-e^{-2\pi\xi}}{2i} = \pi e^{-2\pi\xi}, \quad \text{se } \xi > 0.$$

In definitiva abbiamo che

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \pi e^{--2\pi|\xi|}.$$

Esercizio 5. Determinare la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$.

Svolgimento. Ricordiamo che

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Quindi, sfruttando le proprietà della trasformata in merito alle traslazioni otteniamo

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = e^{\pi i\xi} \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2 + \frac{3}{4}}\right)(\xi).$$

Ora osserviamo che
$$\frac{1}{x^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x)^2+1},$$
da cui, per riscalamento otteniamo
$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{2e^{\pi i \xi}}{\sqrt{3}}\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\left(\frac{\xi\sqrt{3}}{2}\right).$$
Sfruttando l'esercizio precedente, otteniamo quindi
$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\pi(-\sqrt{3}|\xi|+i\xi)}.$$